Задание по курсу «Распределённые алгоритмы»

Александр Чистяков, Роман Шемякин

15 мая 2016

Доказать теорему о корректности алгоритма Сафры с использованием инварианта $P(\gamma)$.

Теорема. *Алгоритм Сафры является корректным алгоритмом обнаружения завершения вычисления.*

Доказательство. Покажем, что из завершения алгоритма Сафры следует завершённость базового вычисления. Воспользуемся тем, что для алгоритма Сафры предикат

$$P(\gamma) \equiv P_M(\gamma) \wedge (P_0(\gamma) \vee P_1(\gamma) \vee P_2(\gamma) \vee P_3(\gamma))$$

является инвариантом.

Заметим, что алгоритм обнаруживает завершение вычисления только тогда, когда выполняются равенства

$$\begin{cases} t = 0 \\ state_{p_0} = passive \\ color_{p_0} = white \\ mc_{p_0} + q(\gamma) = 0 \end{cases}$$

из которых следует ложность предикатов P_1, P_2 и P_3. Таким образом в завершающем состоянии γ^* истинным обязан быть предикат $P_m(\gamma^*) \wedge P_0(\gamma^*)$. Получаем что:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} t=0 \\ P_0 \Rightarrow \forall i(t<i<N): state_{p_i} = passive \\ state_{p_0}=passive \end{array}\right\} \Rightarrow \forall i(0\le i<N): state_{p_i}=passive \\ \left.\begin{array}{r} t=0 \\ P_0 \Rightarrow \left(q(\gamma^*) = \sum\limits_{t<i<N} mc_{p_i}\right) \\ mc_{p_0}+q=0 \\ P_M(\gamma^*) \Rightarrow B(\gamma^*) = \sum\limits_{0\le i<N} mc_{p_i} \end{array}\right\} \Rightarrow B(\gamma^*)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{вычисление завершено}$$

Теперь докажем, что после завершения базового вычисления будет завершён и алгоритм Сафры. Заметим, что после завершения базового вычисления счётчики mc_{p_i} будут иметь постоянные значения и их сумма будет равна 0. После завершения волны, запущенной из такой конфигурации, будет соблюдено равенство $mc_{p_0} + q(\gamma) = 0$ и все процессы будут окрашены в цвет $white$. В результате следующей волны алгоритм Сафры завершится.

Таким образом завершение алгоритма Сафры является необходимым и достаточным условием для завершения базового вычисления и корректность алгоритма Сафры полностью доказана.

□